Μάθημα 7ο: 09/04/2020

Τι πρέπει να ξέρω για ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ:

- Ορισμός 2.2.1
- Πρόταση 2.2.1 (ιδίως (β) - (γ))

SOS-ARA → • Παρατήρηση 2.2.1 και (άλγεβρα ορίων) (γνωστά από ΑΠ Ι).

ΠΡΟΣΟΧΗ: Γινόμενα ακολουθιών δεν τα γνωρίζαμε από τον $\mathbb{R}^2$, τα μαθαίνουμε εδώ (ΝΕΟ - NEW)

→ Τοπολογικές έννοιες στο $\mathbb{C}$ = Τοπολογικές έννοιες στο $\mathbb{R}^2$

ΝΕΟ (NEW) στο $\mathbb{C}$ (το ΑΠΕΙΡΟ ∞): { • Ορισμός 2.2.3 ($z_n \to \infty$) • Παρατήρηση 2.2.2

Πολύ Βασικό:

(1) $z_n \to z \iff z_n - z \to 0 \iff |z_n - z| \to 0$

(2) $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$

(3) $z_n \to z \implies |z_n| \to |z|$

(4) $z_n \to z \iff \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z$ και $\mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: • Πολλά πράγματα είναι ίδια στο $\mathbb{C}$ και στο $\mathbb{R}^2$ αλλά υπάρχει μια διαφορά, που αφορά τον πολλαπλασιασμό ακολουθιών, δηλ. $z_n w_n \to$?

SOS-ARA → • Επίσης $(x_n, y_n) \to (x, y) \iff x_n \to x$ και $y_n \to y$

• $z_n + w_n \to z + w$

- $z_n w_n \to z w$
- $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z}{w}$, $w \in \mathbb{C}^*$

Αυτά τα δύο δεν αποδεικνύονται στον $\mathbb{R}^2$.

→ Εργασία - Η (α)

① Δείξτε τις (2.13), (2.14) [Ενότητα σημειώσεων 4.4.2020]
② Βρείτε αντιπαραδείγματα για την 2.15.

$\boxed{\text{Παράδειγμα 2.2.3 (β)}}$ (από τις σημειώσεις του)

(Άσκηση χρήσιμη για τον χειρισμό του απείρου ∞)

Να δείξτε ότι $w_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} - i^n \sqrt[3]{n} \longrightarrow \infty$.

<u>Λύση</u>

$$|w_n| = |(-1)^n \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1} - i^n \underbrace{\sqrt[3]{n}}_{\to \infty}| \geq \quad [\text{από ΑΠ I}]$$

$$\overset{\text{αντίστροφη}}{\underset{\text{τρ. ανισότητα}}{\geq}} \big|\, |(-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}| - |-i^n \cdot \sqrt[3]{n}| \,\big|$$

$$\geq |-i^n \cdot \sqrt[3]{n}| - |(-1)^n \cdot \sqrt[n]{n}| = \underbrace{\sqrt[3]{n}}_{\to \infty} - \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}$$

- $\sqrt[n]{n} \to 1 \iff \exists\, n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_1 : \sqrt[n]{n} \leq 2$

- $\sqrt[3]{n} \to \infty \iff \forall r > 0 \ \exists\, n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_2 : \sqrt[3]{n} > r + 2$.

$$\Rightarrow \forall r > 0 \ \exists\, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \ \forall n \geq n_0 :$$

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt[n]{n} > r + 2 - 2$$

$$\sqrt[n]{n} \leq 2 \iff -\sqrt[n]{n} \geq -2$$

Άρα $|w_n| > r \overset{\text{από}}{\underset{\text{ορισμό}}{\Longrightarrow}} w_n \longrightarrow \infty$

→ (Α.29 → H.W)

Άσκηση Α.30 :

Έστω $(z_n) \subset \mathbb{C}$ με $\operatorname{Im} z_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $z_n \to z \in \mathbb{C}$

Μπορεί να ισχύει $\operatorname{Im} z \neq 0$; Γιατί ναι ή γιατί όχι ;

Απάντηση

Γιατί (κι ας είναι γελοίο το ερώτημα ...)

για $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, $y_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ δεν ισχύει $y_n \to y \neq 0$

γιατί : αν $y_n \to y$ τότε αναγκαία $y = 0$

λόγω μοναδικότητας ορίου

[Έστω $y > 0$. Αφού $y_n \to y$, τότε $\exists n_0$ $\forall n \geq n_0$ $|y_n - y| < y \Rightarrow$

$\Rightarrow y_n > 0$, $\forall n \geq n_0$

Ανάλογα για $y < 0$]

Τι χρειάζεται η Α.30 ???

Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ και $z_n \to z$ τότε αν $\underbrace{f(z_n)}_{\in \mathbb{R}} \to f(z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z_n) = 0 \Rightarrow f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z) = 0$

(Α.30)

Άσκηση Α.32

$$|z_n|^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \underbrace{\left[(1-(-1)^n)^2 + (1+(-1)^n)^2\right]}_{\substack{= 2\cdot(1^2+((-1)^n)^2) \\ = 4}}$$

$$= \frac{n^2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{4} = n^2$$

$|Re z_n| \not\to \infty \to$ Βλέπε ορισμό.

Άσκηση Α.33

Δείξτε ότι αν $z \in D(0,1)$ και $z_n \to z$ τότε $z_n^n \to 0$

Λύση

- $z \in D(0,1) \Leftrightarrow |z|<1$
- $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z| \Longrightarrow \underbrace{|z_n|^n}_{=|z_n^n|} \to 0 \Leftrightarrow z_n^n \to 0$

A: $\varepsilon = 1-|z|>0 \Rightarrow |z_n| < \underbrace{|z| + \frac{\varepsilon}{2}}_{=c<1}$, $\forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow 0 \leq |z_n|^n < c^n \to 0$$

$$\Rightarrow |z_n|^n \to 0 \quad ■ \quad (0 \leq c < 1)$$

ΕΡΓΑΣΙΑ - Η.ω

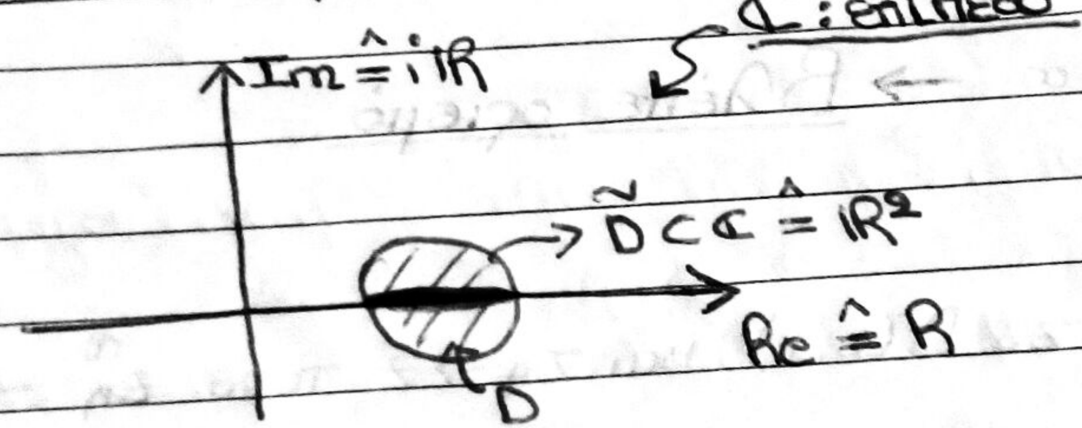
- Α.29 - Α.36
- Θα λύσουμε κάποιες από την Α.35

Για Παρασκευή 10/04/2020:

Πάμε για Όρια Συναρτήσεων.

Επέκταση: $f: D \to R$, $D \subset \mathbb{R}$

Πεδίο Ορισμού:



π.χ. από e^x, $x \in R$ $\xrightarrow[\text{επέκταση}]{}$ e^z, $z \in \mathbb{C}$.